http://math.uni.lu/parlier/ hugo.parlier@uni.lu

Exercices 1 A

1. Démontrer que

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

2. Deviner une formule pour la somme des n premiers entiers positifs impairs, c'est à dire

$$\sum_{k=1}^{n} 2k-1 = 1+3+\cdots+(2n-1).$$

Ensuite démontrer la formule.

3. Démontrer que $7^n - 6n - 1$ est divisible par 36 pour tout entier $n \geq 1$.

4. Soit P_n l'assertion "$n^2 + 5n + 1$ est pair".

a) Démontrer que l'assertion P_{n+1} est vraie si l'assertion P_n est vraie.

b) Pour quel(s) $n \in \mathbb{N}$ est-ce que l'assertion P_n est vraie ?

c) Quelle est la morale de cet exercice ?

5. Pour $x, y \in \mathbb{Z}$, notons $x \equiv_7 y$ si il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que

$$x = y + 7k.$$

a) Montrer que $\equiv_7$ est une relation d'équivalence pour $\mathbb{Z}$.

b) Quelles sont les classes d'équivalence ?

6. Soit $\mathbb{Z}^2$ l'ensemble des (x, y) où $x, y \in \mathbb{Z}$. On définit R une relation sur $\mathbb{Z}^2$ comme suit :

$$(x, y)R(x', y')$$

si $x > x'$ ou si $x = x'$ et $y \leq y'$. Montrer que R est une relation d'ordre sur $\mathbb{Z}^2$.